

Olimpiada Națională de Matematică

Primul test de selecție pentru OBM – Juniori 2003

Subiectul 1

Se consideră rombul $ABCD$ de centru O și un punct P în interiorul rombului, nesituat pe diagonale. Punctul P se proiectează pe laturile $(AB), (BC), (CD), (DA)$ în punctele M, N, Q, R , respectiv.

Mediatoarea segmentului MN intersectează mediatoarea segmentului RQ în S și mediatoarea segmentului NQ intersectează mediatoarea segmentului MR în T . Să se demonstreze că patrulaterul cu vârfurile în P, S, T și O este dreptunghi.

Subiectul 2

Se dau numerele prime $n_1 < n_2 < \dots < n_{31}$. Să se arate că dacă 30 divide $n_1^4 + n_2^4 + \dots + n_{31}^4$, atunci printre numerele date există cel puțin trei numere prime consecutive.

Subiectul 3

Fie n un număr natural nenul. Să se arate că nu există numere naturale x și y cu proprietatea

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{4n+2}.$$

Subiectul 4

Să se arate că există o colorare a punctelor planului cu 2 culori diferite astfel încât să nu existe nici un segment având toate punctele la fel colorate.

Timp de lucru: 4 ore